

# Artykuł IV



PRIME  
NUMBERS

$$H(a_+ \psi) = (E - \hbar\omega)(a_+ \psi) \quad J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad \text{Nuclear radius} = A^{1/3} \cdot 1.2 \text{ fm}$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \quad \text{solenoid: } L = N\Phi/I = \mu_0 AN^2/\ell \quad \tau_{1/2} = \ln(2)\tau, \quad N = N_0 \exp(-t/\tau)$$

$$H = \hbar\omega \left( a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) \quad PE = -G \frac{Mm}{r}, \quad \Delta PE = mgh (\text{small } h), \quad F = G \frac{Mm}{r^2} = mg \quad B\ell = \mu_0 I \text{ for single wire } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad c_n = \int \psi_n(x)^* f(x) dx$$

$$p_x \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad p_y \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad p_z \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} \quad P_a + \frac{1}{2} \rho_a v_a^2 + \rho_a g h_a = P_b + \frac{1}{2} \rho_b v_b^2 + \rho_b g h_b \quad U_{\text{capacitor}} = Q^2/(2C) = CV^2/2 =$$

**Quantum Mechanics:**

$$L = I\omega = mvr \sin \theta, \quad (\theta = \text{angle between } v \text{ and } r) \quad \Delta \prod \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi \Rightarrow \Phi(\phi) =$$

$$a_+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2\hbar m \omega}} (-ip + m\omega x) \quad U = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0) = \text{energy/volume} \quad \mu \quad \langle H \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} |$$

$$n_a \sin \theta_a = n_b \sin \theta_b, \quad \sin \theta_{\text{crit}} = \frac{n_b}{n_a} \quad \sum_c \quad \infty \quad \Delta L/L = \alpha \Delta T, \quad \Delta V/V = 3\alpha \Delta T \quad S = \text{Energy}/(A\Delta t) = cU \quad H(a_+ \psi) = (E + \hbar\omega)(a_+ \psi)$$

$$\Theta(\theta) = AP_l^m(\cos \theta) \quad \lambda_{\text{matter}} = \lambda_{\text{vac}}/n, \quad f_{\text{matter}} = f_{\text{vac}}, \quad c_{\text{matter}} = c_{\text{vac}}/n \quad = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \Psi(x)$$

$$\tau = rF \sin \theta, \quad I\alpha = \tau, \quad I_{\text{point}} = mR^2 \quad v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad f = 1/T \quad \Psi_n(\mathbf{r}, t) = \psi_n(\mathbf{r}) e^{-iE_n t/\hbar}$$

$$L = \hbar \sqrt{\ell(\ell + 1)}, \quad L_z = m_\ell \hbar, \quad m_\ell = -\ell, \dots, \ell$$

$$\int \psi_m(x)^* \psi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad \Omega \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{if } m \neq n \\ 1, & \text{if } m = n \end{cases}$$

$$F = qvB \sin \theta, \quad F = ILB \sin \theta \quad h = 6.626 \times 10^{-34}$$

$$\text{Black body: } \lambda_{\text{max}} T = 2.9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad \hbar\omega \left( a_+ a_- + \frac{1}{2} \right) \psi = E\psi$$



## O ilości liczb złożonych mniejszych od danej wielkości. Lematy, cd.

Artykuł IV:

***Model rozmieszczania się liczb pierwszych w krótkich przedziałach: dowód poprawności***

Przypomnijmy zaproponowany w poprzednich artykułach model pokazujący kaskadowy mechanizm generowania się liczb pierwszych, którego formalny zapis ilustruje następujące twierdzenie:

Niech  $k$  oznacza liczbę liczb pierwszych między  $n$  i  $2n+1$ , a  $c$  liczbę liczb pierwszych między  $n^2$  i  $(n+1)^2$

**Hipoteza 1:**

Między  $n^2$  i  $(n+1)^2$  występuje  $c$  liczb pierwszych,  $c$  jest zbliżone do wartości  $\approx k$

Dla czytelników nieobcujących zawodowo z rozumowaniami matematycznymi sens tego twierdzenia jest czytelniejszy na konkretnych przykładach liczbowych:

10 – 21 (Mamy przedział zawierający 10 liczb, w tym 4 liczby pierwsze: 11,13,17 i 19, czyli  $k$  liczb pierwszych)

↓  $10^2=100$ ,  $11^2=121$  → 100–121 (przedział zawiera 20 liczb, w tym 5 liczb pierwszych:  
101,103,107,109 i 113, czyli  $c$  liczb pierwszych)

100 – 201 ( $k = 21$  liczb pierwszych)

↓↓  $100^2=10\ 000$ ,  $101^2 = 10\ 201$  → 10 000 – 10 201 ( $c = 23$  liczby pierwsze)

1000 – 2001 ( $k = 135$  liczb pierwszych)

↓↓↓  $1000^2=1000\ 000$ ,  $101^2 = 1\ 002\ 001$  → 1 000 000 – 1 002 001 ( $c = 152$  liczby pierwsze)

10 000 – 20 001 ( $k = 1037$  liczb pierwszych)

↓↓↓↓  $10\ 000^2=100\ 000\ 000$ ,  $10\ 001^2=100\ 020\ 001$  → 100 000 000 - 100 020 001  
( $c = 1089$  liczb pierwszych)

100 000 – 200 001 ( $k = 8391$  liczb pierwszych)

↓↓↓↓↓  $100000^2=10000000000$ ,  $100001^2=10000200001$  → 10000000000-10000200001  
( $c = 8631$  liczb pierwszych)

*Zaobserwowana w naszych badaniach nad liczbami pierwszymi zależność statystyczna, z uwagi na możliwość dostępu do odpowiednio obszernych list z liczbami pierwszymi, zachodzi daleko dalej niż mógł analogiczną własną zależność statystyczną badać Gauss.*

Ponieważ obserwacja dotyczy nie tylko różnicy dwóch kolejnych kwadratów liczb naturalnych, ale również wszystkich przedziałów liczbowych o tej długości, w zakresie od  $2n+1$  do  $(n+1)^2$ , to w sposób oczywisty musi skłaniać nas to do rozszerzenia naszego twierdzenia do następującej postaci:

Niech  $k$  oznacza liczbę liczb pierwszych między  $n$  i  $2n+1$ , a  $c$  liczbę liczb pierwszych w każdym przedziale o długości  $2n$ , począwszy od  $2n+1$  do  $(n+1)^2$  włącznie

**Hipoteza 2: W przedziałach liczb naturalnych o długości  $2n$  występuje  $c$  liczb pierwszych i  $0,75k \leq c \leq 2k$**

Wynika stąd, że jeżeli w przedziale liczb o długości 10, czyli między 10 a 21 (między  $n$  i  $2n+1$ ) są cztery liczby pierwsze ( $k$  liczb pierwszych), to we wszystkich przedziałach o długości dwukrotnie większej, czyli 21-42, 22-43, 23-44, etc. aż do 100 -121 włącznie, wystąpi zbieżna do 4 ilość liczb pierwszych (czyli we wszystkich przedziałach o długości  $2n$ , aż do przedziału między  $n^2$  a  $(n+1)^2$  wystąpi  $c$  zbieżnych do  $k$  liczb pierwszych).

Uogólnienia zapisywane za pomocą formuł matematycznych stają się oczywiste dla konkretnych liczb, dlatego poniżej proponujemy zapoznanie się z ich początkową statystyką.

Środowiskowa anegdota wspomina wybitnego matematyka, który uważał, że analiza tablic z liczbami pierwszymi przy śniadaniu jest lepszą rozrywką niż lektura sprawozdań sportowych. Poniższa statystyka, siłą rzeczy jest uderzająca, gdyż pozwala na intuicyjne uchwycenie mechanizmu rządzącego rozmieszczaniem się liczb pierwszych:

1. Przedział jednoelementowy: między 1-3 (od  $n$  do  $2n+1$ ) jest **jedna liczba pierwsza 2**, a w przedziale  $1^2=1$  ( $n^2$ ) i  $2^2=4$  ( $(n+1)^2$ ) są dwie liczby pierwsze: **2 i 3**. Na niebiesko wyróżniono przedziały, w których  $c > k$ , na czerwono  $c = k$ , fiolet to  $c < k$  Poniżej dalsze statystyki.

2. Przedział dwuelementowy: 2-5, **jedna liczba pierwsza: 3**.

Między  $2^2=4$  ( $n^2$ ) i  $3^2=9$  ( $(n+1)^2$ ) są dwie liczby pierwsze: **5 i 7**

3. Przedział trzelementowy: 3-7, **jedna liczba pierwsza: 5**.

$3^2=9$  i  $4^2=16$ ; mamy 3 przedziały 6-elementowe: 7-14 (dwie liczby pierwsze: **11 i 13**), 8-15 (dwie liczby pierwsze: **11 i 13**) oraz 9-16 (dwie liczby pierwsze: **11 i 13**)

4. Przedział 4-elementowy: 4-9, **dwie liczby pierwsze: 5 i 7**. Używamy symbolu LP dla słów: liczba pierwsza

$4^2=16$  i  $5^2=25$ ; mamy 8 przedziałów 8-elementowych:

9-18(**3LP:11,13,17**)

11-20(**3LP:13,17,19**)

13-22(**2LP: 17,19**)

15-24(**3LP: 17,19,23**)

10-19(**3LP:11,13,17**)

12-21(**3LP:13,17,19**)

14-23(**2 LP:17,19**)

16-25(**3LP:17,19,23**)

**5. Przedział 5-elementowy: 5-11, 1 LP: 7.** $5^2=25$  i  $6^2=36$ ; mamy 15 przedziałów 10-elementowych:

11-22(3LP:13,17,19) 14-25(3LP:17,19,23) 17-28(2LP:19,23) 20-31(2LP:23,29) 23-34(2LP: 29,31)  
 12-23(3LP:13,17,19) 15-26(3LP:17,19,23) 18-29(2LP:19,23) 21-32(3LP:23,29,31) 24-35(2LP: 29,31)  
 13-24(3LP:17,19,23) 16-27(3LP:17,19,23) 19-30(2LP:23,29) 22-33(3LP:23,29,31) 25-36(2LP:29,31)

**6. Przedział 6-elementowy: 6-13, 2 LP: 7 i 11.** $6^2=36$  i  $7^2=49$ ; mamy 24 przedziały 12-elementowe:

13-26(3LP:17,19,23) 19-32(3LP:23,29,31) 25-38(3LP:29,31,37) 31-44(3LP:37,41,43)  
 14-27(3LP:17,19,23) 20-33(3LP:23,29,31) 26-39(3LP:29,31,37) 32-45(3LP:37,41,43)  
 15-28(3LP:17,19,23) 21-34(3LP:23,29,31) 27-40(3LP:29,31,37) 33-46(3LP:37,41,43)  
 16-29(3LP:17,19,23) 22-35(3LP:23,29,31) 28-41(3LP:29,31,37) 34-47(3LP:37,41,43)  
 17-30(3LP:19,23,29) 23-36(2LP:29,31) 29-42(3LP:31,37,41) 35-48(4LP:37,41,43,47)  
 18-31(3LP:19,23,29) 24-37(2LP:29,31) 30-43(3LP:31,37,41) 36-49(4LP:37,41,43,47)

**7. Przedział 7-elementowy: 7-15, 2 LP: 11 i 13.** $7^2=49$  i  $8^2=64$ ; mamy 35 przedziałów 14-elementowych:

15-30(4LP:17,19,23,29) 27-42(4LP:29,31,37,41) 39-54(4LP:41,43,47,53)  
 16-31(4LP:17,19,23,29) 28-43(4LP:29,31,37,41) 40-55(4LP:41,43,47,53)  
 17-32(4LP:19,23,29,31) 29-44(4LP:31,37,41,43) 41-56(3LP:43,47,53)  
 18-33(4LP:19,23,29,31) 30-45(4LP:31,37,41,43) 42-57(3LP:43,47,53)  
 19-34(3LP:23,29,31) 31-46(3LP:37,41,43) 43-58(2LP:47,53)  
 20-35(3LP:23,29,31) 32-47(3LP:37,41,43) 44-59(2LP:47,53)  
 21-36(3LP:23,29,31) 33-48(4LP:37,41,43,47) 45-60(3LP:47,53,59)  
 22-37(3LP:23,29,31) 34-49(4LP:37,41,43,47) 46-61(3LP:47,53,59)  
 23-38(3LP:29,31,37) 35-50(4LP:37,41,43,47) 47-62(3LP:53,59,61)  
 24-39(3LP:29,31,37) 36-51(4LP:37,41,43,47) 48-63(3LP:53,59,61)  
 25-40(3LP:29,31,37) 37-52(3LP:41,43,47) 49-64(3LP:53,59,61)  
 26-41(3LP:29,31,37) 38-53(3LP:41,43,47)

**8. Przedział 8-elementowy: 8-17, 2 LP: 11 i 13.** $8^2=64$  i  $9^2=81$ ; mamy 48 przedziałów 16-elementowych:

17-34(4LP:19,23,29,31) 33-50(4LP:37,41,43,47) 49-66(3LP:53,59,61)  
 18-35(4LP:19,23,29,31) 34-51(4LP:37,41,43,47) 50-67(3LP:53,59,61)  
 19-36(3LP:23,29,31) 35-52(4LP:37,41,43,47) 51-68(4LP:53,59,61,67)  
 20-37(3LP:23,29,31) 36-53(4LP:37,41,43,47) 52-69(4LP:53,59,61,67)  
 21-38(4LP:23,29,31,37) 37-54(4LP:41,43,47,53) 53-70(3LP:59,61,67)  
 22-39(4LP:23,29,31,37) 38-55(4LP:41,43,47,53) 54-71(3LP:59,61,67)  
 23-40(3LP:29,31,37) 39-56(4LP:41,43,47,53) 55-72(4LP:59,61,67,71)  
 24-41(3LP:29,31,37) 40-57(4LP:41,43,47,53) 56-73(4LP:59,61,67,71)  
 25-42(4LP:29,31,37,41) 41-58(3LP:43,47,53) 57-74(5LP:59,61,67,71,73)  
 26-43(4LP:29,31,37,41) 42-59(3LP:43,47,53) 58-75(5LP:59,61,67,71,73)  
 27-44(5LP:29,31,37,41,43) 43-60(3LP:47,53,59) 59-76(4LP:61,67,71,73)  
 28-45(5LP:29,31,37,41,43) 44-61(3LP:47,53,59) 60-77(4LP:61,67,71,73)  
 29-46(4LP:31,37,41,43) 45-62(4LP:47,53,59,61) 61-78(3LP:67,71,73)  
 30-47(4LP:31,37,41,43) 46-63(4LP:47,53,59,61) 62-79(3LP:67,71,73)  
 31-48(4LP:37,41,43,47) 47-64(3LP:53,59,61) 63-80(4LP:67,71,73,79)  
 32-49(4LP:37,41,43,47) 48-65(3LP:53,59,61) 64-81(4LP:67,71,73,79)

**9. Przedział 9-elementowy: 9-19, 3 LP: 11, 13 i 17.**

$9^2=81$  i  $10^2=100$ ; mamy 63 przedziały 18-elementowe:

|                           |                           |                           |                            |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 19-38(4LP:23,29,31,37)    | 35-54(5LP:37,41,43,47,53) | 51-70(4LP:53,59,61,67)    | 67-86(4LP:71,73,79,83)     |
| 20-39(4LP:23,29,31,37)    | 36-55(5LP:37,41,43,47,53) | 52-71(4LP:53,59,61,67)    | 68-87(4LP:71,73,79,83)     |
| 21-40(4LP:23,29,31,37)    | 37-56(4LP:41,43,47,53)    | 53-72(4LP:59,61,67,71)    | 69-88(4LP:71,73,79,83)     |
| 22-41(4LP:23,29,31,37)    | 38-57(4LP:41,43,47,53)    | 54-73(4LP:59,61,67,71)    | 70-89(4LP:71,73,79,83) 23- |
| 42(4LP:29,31,37,41)       | 39-58(4LP:41,43,47,53)    | 55-74(5LP:59,61,67,71,73) | 71-90(4LP:73,79,83,89)     |
| 24-43(4LP:29,31,37,41)    | 40-59(4LP:41,43,47,53)    | 56-75(5LP:59,61,67,71,73) | 72-91(4LP:73,79,83,89)     |
| 25-44(5LP:29,31,37,41,43) | 41-60(4LP:43,47,53,59)    | 57-76(5LP:59,61,67,71,73) | 73-92(3LP:79,83,89)        |
| 26-45(5LP:29,31,37,41,43) | 42-61(4LP:43,47,53,59)    | 58-77(5LP:59,61,67,71,73) | 74-93(3LP:79,83,89)        |
| 27-46(5LP:29,31,37,41,43) | 43-62(4LP:47,53,59,61)    | 59-78(4LP:61,67,71,73)    | 75-94(3LP:79,83,89)        |
| 28-47(5LP:29,31,37,41,43) | 44-63(4LP:47,53,59,61)    | 60-79(4LP:61,67,71,73)    | 76-95(3LP:79,83,89)        |
| 29-48(5LP:31,37,41,43,47) | 45-64(4LP:47,53,59,61)    | 61-80(4LP:67,71,73,79)    | 77-96(3LP:79,83,89)        |
| 30-49(5LP:31,37,41,43,47) | 46-65(4LP:47,53,59,61)    | 62-81(4LP:67,71,73,79)    | 78-97(3LP:79,83,89)        |
| 31-50(4LP:37,41,43,47)    | 47-66(3LP:53,59,61)       | 63-82(4LP:67,71,73,79)    | 79-98(3LP:83,89,97)        |
| 32-51(4LP:37,41,43,47)    | 48-67(3LP:53,59,61)       | 64-83(4LP:67,71,73,79)    | 80-99(3LP:83,89,97)        |
| 33-52(4LP:37,41,43,47)    | 49-68(4LP:53,59,61,67)    | 65-84(5LP:67,71,73,79,83) | 81-100(3LP:83,89,97)       |
| 34-53(4LP:37,41,43,47)    | 50-69(4LP:53,59,61,67)    | 66-85(5LP:67,71,73,79,83) |                            |

**10. Przedział 10-elementowy: 10-21, 4 LP: 11, 13, 17 i 19.**

$10^2=100$  i  $11^2=121$ ; mamy 80 przedziałów 20-elementowych:

|                              |                           |                                    |
|------------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| 21-42(5LP:23,29,31,37,41)    | 48-69(4LP:53,59,61,67)    | 75-96(3LP:79,83,89)                |
| 22-43(5LP:23,29,31,37,41)    | 49-70(4LP:53,59,61,67)    | 76-97(3LP:79,83,89)                |
| 23-44(5LP:29,31,37,41,43)    | 50-71(4LP:53,59,61,67)    | 77-98(4LP:79,83,89,97)             |
| 24-45(5LP:29,31,37,41,43)    | 51-72(5LP:53,59,61,67,71) | 78-99(4LP:79,83,89,97)             |
| 25-46(5LP:29,31,37,41,43)    | 52-73(5LP:53,59,61,67,71) | 79-100(3LP:83,89,97)               |
| 26-47(5LP:29,31,37,41,43)    | 53-74(5LP:59,61,67,71,73) | 80-101(3LP:83,89,97)               |
| 27-48(6LP:29,31,37,41,43,47) | 54-75(5LP:59,61,67,71,73) | 81-102(4LP:83,89,97,101)           |
| 28-49(6LP:29,31,37,41,43,47) | 55-76(5LP:59,61,67,71,73) | 82-103(4LP:83,89,97,101)           |
| 29-50(5LP:31,37,41,43,47)    | 56-77(5LP:59,61,67,71,73) | 83-104(4LP:89,97,101,103)          |
| 30-51(5LP:31,37,41,43,47)    | 57-78(5LP:59,61,67,71,73) | 84-105(4LP:89,97,101,103)          |
| 31-52(4LP:37,41,43,47)       | 58-79(5LP:59,61,67,71,73) | 85-106(4LP:89,97,101,103)          |
| 32-53(4LP:37,41,43,47)       | 59-80(5LP:61,67,71,73,79) | 86-107(4LP:89,97,101,103)          |
| 33-54(5LP:37,41,43,47,53)    | 60-81(5LP:61,67,71,73,79) | 87-108(5LP:89,97,101,103,107)      |
| 34-55(5LP:37,41,43,47,53)    | 61-82(4LP:67,71,73,79)    | 88-109(5LP:89,97,101,103,107)      |
| 35-56(5LP:37,41,43,47,53)    | 62-83(4LP:67,71,73,79)    | 89-110(5LP:97,101,103,107,109)     |
| 36-57(5LP:37,41,43,47,53)    | 63-84(5LP:67,71,73,79,83) | 90-111(5LP:97,101,103,107,109)     |
| 37-58(4LP:41,43,47,53)       | 64-85(5LP:67,71,73,79,83) | 91-112(5LP:97,101,103,107,109)     |
| 38-59(4LP:41,43,47,53)       | 65-86(5LP:67,71,73,79,83) | 92-113(5LP:97,101,103,107,109)     |
| 39-60(5LP:41,43,47,53,59)    | 66-87(5LP:67,71,73,79,83) | 93-114(6LP:97,101,103,107,109,113) |
| 40-61(5LP:41,43,47,53,59)    | 67-88(4LP:71,73,79,83)    | 94-115(6LP:97,101,103,107,109,113) |
| 41-62(5LP:43,47,53,59,61)    | 68-89(4LP:71,73,79,83)    | 95-116(6LP:97,101,103,107,109,113) |
| 42-63(5LP:43,47,53,59,61)    | 69-90(5LP:71,73,79,83,89) | 96-117(6LP:97,101,103,107,109,113) |
| 43-64(4LP:47,53,59,61)       | 70-91(5LP:71,73,79,83,89) | 97-118(5LP:101,103,107,109,113)    |
| 44-65(4LP:47,53,59,61)       | 71-92(4LP:73,79,83,89)    | 98-119(5LP:101,103,107,109,113)    |
| 45-66(4LP:47,53,59,61)       | 72-93(4LP:73,79,83,89)    | 99-120(5LP:101,103,107,109,113)    |
| 46-67(4LP:47,53,59,61)       | 73-94(3LP:79,83,89)       | 100-121(5LP:101,103,107,109,113)   |
| 47-68(4LP:53,59,61,67)       | 74-95(3LP:79,83,89)       |                                    |

Jak łatwo zauważyć pojawiają się pewne dewiacje, łatwo jednak dające się uporządkować w trzy rodzaje statystyk: na ogół  $c > k$ , znacznie rzadziej  $c = k$ , a jeszcze rzadziej  $c < k$ . To jedynie statystyka pierwszych dziesięciu kwadratów liczb obejmująca 278 przedziałów liczbowych; w naszych badaniach analiza dobiega 100 000 zbadanych przedziałów, w których statystyki dają porównywalne wyniki. Oczywiście korelacja statystyczna może być jedynie silną przesłanką do wysuwania hipotez – w nauce, a w matematyce w szczególności, najistotniejszym celem jest znalezienie jedno jednoznacznego związku przyczynowo–skutkowego. Aby go wskazać musimy skompletować niezbędne instrumentarium, które obejmuje trzy narzędzia z zakresu elementarnej, a nawet intuicyjnej matematyki. Narzędziami w matematyce są twierdzenia, które użyte w argumentacji dowodowej, nazywa się lematami. W tym miejscu, dla potrzeb naszego rozumowania przytoczymy twierdzenia z artykułu III:  
Niech  $n \in \mathbb{N}$

**Lemma 4:** Do wyznaczenia pierwszych dzielników każdej liczby złożonej  $< (n+1)^2$  wystarcza znajomość liczb pierwszych  $\leq n$

Mamy więc nowe twierdzenie, które jako lemat orzeka, że do wyznaczenia wszystkich liczb złożonych między  $10^2 = 100 (n^2)$  i  $11^2 ((n+1)^2)$  wystarcza znajomość liczb pierwszych  $\leq 10 (\leq n)$ . Tym samym dostrzegamy, że każda liczba złożona  $< 121$  (czyli  $< (n+1)^2$ ) musi być kolejną wielokrotnością: 2,3,5 lub 7 (wielokrotnością liczby pierwszej  $\leq n$ ). Teraz możemy sięgnąć po kolejne narzędzie ze szkolnej matematyki, zadając pytanie: ile liczb jest między  $10^2 = 100 (n^2)$  i  $11^2 ((n+1)^2)$ ? Odpowiedź brzmi:  $2 \times 10 (2n)$ :  
 $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

Niech  $n \in \mathbb{N}$

**Lemma 5:** Ilość liczb w przedziale między  $n^2$  i  $(n+1)^2$  wynosi  $2n$ .

Każdy, kto zajmował się teorią liczb pierwszych, odruchem Pawłowa, widząc w rozważaniach na temat liczb pierwszych pojawienie się  $2n$  skojarzy w pierwszym odruchu postulat Bertranda: między  $n$  i  $2n$  musi być liczba pierwsza. Teraz wystarczy wspomnieć szkolne zadania z rachunku prawdopodobieństwa o losowaniu kul z pudełka zawierającego kule czarne i czerwone: prawdopodobieństwo wylosowania kuli określonego koloru zależy od liczebności kul tego koloru – spośród 10 kul (6 czarnych i 4 czerwone) prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej wynosi  $4:10 (0,4)$ . Jeżeli więc:

1. między  $10(n)$  i  $2 \times 10 + 1 (2n+1)$  znajduje się  $10(n)$  liczb, spośród których są 4 liczby pierwsze:

|    |    |     |    |     |     |     |    |     |    |      |      |
|----|----|-----|----|-----|-----|-----|----|-----|----|------|------|
| 10 | 11 | 12  | 13 | 14  | 15  | 16  | 17 | 18  | 19 | 20   | 21   |
| n  |    | ↑   |    | ↑   | ↑   | ↑   |    | ↑   |    | ↑    | 2n+1 |
|    |    | 2x6 |    | 2x7 | 3x5 | 2x8 |    | 2x9 |    | 2x10 |      |

to z uwagi na to, że

2. wszystkie liczby złożone między:  $10(n)$  i  $2 \times 10 + 1 (2n+1)$  mają dzielniki pierwsze  $< 10 (2,3,5,7)$ , a więc  $\leq n$   
i

wszystkie liczby złożone między:  $10^2(n^2)$  i  $11^2((n+1)^2)$  również mogą mieć jedynie takie same

dzielniki pierwsze  $<10$  ( $\leq n$ ) wnioskujemy, że z uwagi na identyczność kryterium wyboru, a tym samym jego procentowy udział, to:

3. między  $10^2=100(n^2)$  i  $2 \times 10+1=121$  ( $(2n+1)^2$ ) też muszą być co najmniej 3 liczby pierwsze (c. liczby pierwszych) Oczywiście nasuwa się pytanie dlaczego 3 liczby pierwsze, a nie dokładnie 8? Przecież przedział jest dwa razy dłuższy a kryterium wyboru jest identyczne (procentowy udział liczb złożonych:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}$  a więc również dla  $\frac{1}{n}$ ), a zamiast 8 liczb pierwszych mamy 5? Odpowiedzi udziela analiza algorytmu Eratostenesa. Na początek przyjrzyjmy się situ Eratostenesa dla 100 początkowych liczb naturalnych. Zrobimy to jednak nieco inaczej niż jest to przyjęte w dotychczasowych prezentacjach tego problemu.

Tak jak na diagramie poniżej zaznaczamy liczbę 2, a następnie podkreślamy co drugą liczbę. Każda z tych wyróżnionych liczb musi być liczbą złożoną, gdyż jako wielokrotność liczby pierwszej 2 musi się też przez nią dzielić – nie może więc być liczbą pierwszą. Jak łatwo zauważyć liczby podzielne przez liczbę pierwszą 2 stanowią 50 % liczb w każdej dziesiątce liczb. Będzie tak również w przedziale o dowolnej długości. Jeżeli rozważać będziemy np. liczby między 10-21, 100-121, albo pomiędzy 200-401 to też będzie ich 50% z dokładnością do jednej liczby (między 13 i 15 jest 100% liczb podzielnych przez 2, a między 92 i 100 tylko 3 z 7 liczb są podzielne przez 2, a 4 liczby podzielne nie są, czyli liczb podzielnych przez 2 jest mniej niż 50%). Jakkolwiek więc mamy do czynienia z dziewięcią wynoszącą 1 w częstości występowania liczb podzielnych przez 2, to jednak im dłuższy będzie rozpatrywany przedział liczbowy, tym mniejszy będzie udział tej dziewięci w procentowym zapisie liczebności tych liczb, np. między 92 i 1000 000 jest 999907 liczb, z czego 499954 to liczby nieparzyste, a jedna mniej czyli 499953 to liczby podzielne przez liczbę 2. Tak więc wraz ze wzrostem długości rozpatrywanego przedziału liczbowego udział liczb parzystych osiąga dokładnie 50%

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20  
 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30  
 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40  
 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50  
 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60  
 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70  
 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80  
 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90  
 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Następny krok w algorytmie Eratostenesa nakazuje wyróżnienie pierwszej niepodkreślonej liczby jaka występuje po liczbie 2 – jest nią kolejna liczba pierwsza, czyli liczba 3. Podkreślamy co trzecią liczbę – każda z nich oczywiście jest znowu liczbą złożoną, gdyż jako wielokrotność liczby pierwszej 3 musi się też przez nią dzielić, więc z definicji ma więcej niż dwa dzielniki i zalicza się do liczb złożonych. Zrobimy to jednak na oddzielnym diagramie. Dzięki temu łatwo zauważyć regularny wzór jaki te wielokrotności tworzą. Łatwo zauważyć, że liczb złożonych i podzielnych przez liczbę pierwszą 3 jest dokładnie 33,(3)%. I w tym miejscu zaczyna się wyłaniać wzór opisujący algorytm Euklidesa.

Od 100% liczb w danym przedziale trzeba odjąć 50% liczb podzielnych przez dwa, następnie odjąć 33,(3)% liczb podzielnych przez 3, ale dodać (!) 16,1(6)% liczb będących wspólną wielokrotnością liczb 2 i 3, gdyż w obydwu tabelach co szоста liczba z podkreśleń się powtarza: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96. Symbol % to zapis ułamka  $\frac{1}{100}$ , czyli  $100\% = 100 \cdot \frac{1}{100} = 1$ . Jeżeli przez  $L_p$  oznaczymy liczbę liczb pierwszych, a cyfrą 1 (czyli 100%) - zapiszemy liczbę wszystkich liczb w rozpatrywanym przedziale, to pierwszy człon wzoru jest gotowy:  $L_p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \dots$

Dokładniejszą formułą będzie zapis następujący:

|   |   |                           |                 |                           |  |  |  |
|---|---|---------------------------|-----------------|---------------------------|--|--|--|
| wielokrotności  |   | wielokrotności            |                 |                           |  |  |  |
| liczby pierwszej <b>2</b>   | ↓ | liczby pierwszej <b>3</b> | ↓               |                           |  |  |  |
|   |   |                           |                 |                           |  |  |  |
| $L_p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{100} = \frac{300 - 150 - 100 + 50 + 6 - 3}{2 \times 3 \times 50} = \frac{103}{300} \approx 0,34$ |   |                           |                 |                           |  |  |  |
|   | ↑ | ↑                         | ↑               | ↑                         |  |  |  |
| Liczby będące zarówno   | ↑ | ↑                         | ↑               | ↑                         |  |  |  |
| wielokrotnościami <b>2 i 3</b>  |   | liczba <b>2</b>           | liczba <b>3</b> | liczba specjalna <b>1</b> |  |  |  |

**Wartość rzeczywista dla liczb z przedziału (0;100) = 0,34.**

Druga oczywista obserwacja liczb złożonych podzielnych przez liczbę pierwszą 3 to dziewięć liczebności tych liczb w każdej kolejnej 10. Łatwo zauważyć, że w pierwszej i w drugiej dziesiątce są trzy liczby podzielne przez trzy, a w trzeciej dziesiątce takich liczb mamy 4. Ten cykl stale się powtarza: dwie dziesiątki liczb z trzema liczbami podzielnymi przez liczbę 3 i dziesiątka z czterema liczbami podzielnymi przez liczbę 3. Podobnie jednak, jak w przypadku liczb parzystych, gdy rozpatrywany przedział liczb rośnie, wartość ta wynosi dokładnie  $33,(3)\% = \frac{1}{3}$  z dziewięcią 1 oraz z koniecznością uwzględnienia wspomnianej już wspólnej wielokrotności liczb 2 i 3.

1 **2** **3** 4 5 **6** 7 8 **9** 10  
 11 **12** 13 14 **15** 16 17 **18** 19 20  
**21** 22 23 **24** 25 26 **27** 28 29 **30**  
 31 32 **33** 34 35 **36** 37 38 **39** 40  
 41 **42** 43 44 **45** 46 47 **48** 49 50  
**51** 52 53 **54** 55 56 **57** 58 59 **60**  
 61 62 **63** 64 65 **66** 67 68 **69** 70  
 71 **72** 73 74 **75** 76 77 **78** 79 80  
**81** 82 83 **84** 85 86 **87** 88 89 **90**  
 91 92 **93** 94 95 **96** 97 98 **99** 100



Następny krok w algorytmie Eratostenesa nakazuje wyróżnienie pierwszej niepodkreślonej liczby jaka występuje po liczbach 2 i 3 – jest nią kolejna liczba pierwsza, czyli liczba 5. Ponieważ tak, jak w przypadku liczby 2, również liczba 5 jest podwielokrotnością liczby 10 - podkreślenie liczb podzielnych przez 5 daje równie harmonijny rozkład: w każdej dziesiątce są dwie takie liczby. Jeżeli jednak rozpatrywać przedziały o różnej długości, znowu wystąpi dewiacja w liczebności tych liczb o 1. Ich liczebność w każdym dużym przedziale liczbowym to 20% czyli  $\frac{1}{5}$  z dewiacją 1. Możemy wstawić kolejny człon do naszego równania, oczywiście uwzględniając ilość liczb powtarzających się, czyli dodając wspólne wielokrotności liczb 2 i 5 (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 i 100) oraz wspólne wielokrotności liczb 3 i 5 (15,30,45,60,75 i 90) pomniejszone o wspólne wielokrotności liczb 2, 3 i 5 (30,60 i 90):

$$L_p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{2}{100} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} - \frac{1}{2 \times 3 \times 5} + \frac{1}{100} - \frac{1}{100} = \frac{92}{300} \approx 0,3$$

**Wartość rzeczywista dla liczb z przedziału (0;100) = 0,28**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20  
 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30  
 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40  
 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50  
 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60  
 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70  
 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80  
 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90  
 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Następny krok w algorytmie Eratostenesa nakazuje wyróżnienie pierwszej niepodkreślonej liczby jaka występuje po liczbach 2, 3 i 5 – jest nią kolejna liczba pierwsza, czyli liczba 7. Znowu łatwa jest do wychwycenia powtarzalna dewiacja w obrębie każdej dziesiątki liczb: liczba podzielna przez liczbę pierwszą 7 może pojawić się tylko jeden raz lub dwa razy, ale wraz ze wzrostem długości rozpatrywanego przedziału będzie to dokładnie  $\frac{1}{7}$  czyli 14,29% rozpatrywanych liczb z dewiacją jednej liczby i uwzględnieniem liczb powtarzających się jako wspólne wielokrotności liczb 2 i 7 (14,28,42,56,70,84,98), 3 i 7 (21,42,63,84) oraz 5 i 7 (35,70). Wzór zostanie rozbudowany o kolejny człon

$$L_p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{2}{100} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \times 5} + \frac{1}{3 \times 5} - \frac{1}{2 \times 3 \times 5} + \frac{1}{100} - \frac{1}{7} + \dots \approx 0,26$$

**Wartość rzeczywista dla liczb z przedziału (0;100) = 0,25**

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20  
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30  
 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40  
 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50  
 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60  
 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70  
 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80  
 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90  
91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Oczywiście wzór przybiera mało praktyczną postać, natomiast pozwala na uogólnienie z zadaną dokładnością do wspomnianych dewiacji położenia: *w dowolnym przedziale liczbowym znajduje się procentowo zbliżona (zbieżna co do wartości liczbowej) ilość liczb złożonych wg przyjętej specyfikacji procentowej, a tym samym zbliżona liczba liczb pierwszych.* Dyskusję o wskazanych wyżej dewiacjach lokalnych w rozmieszczeniu liczb pierwszych przeprowadzamy w artykułach kolejnych.