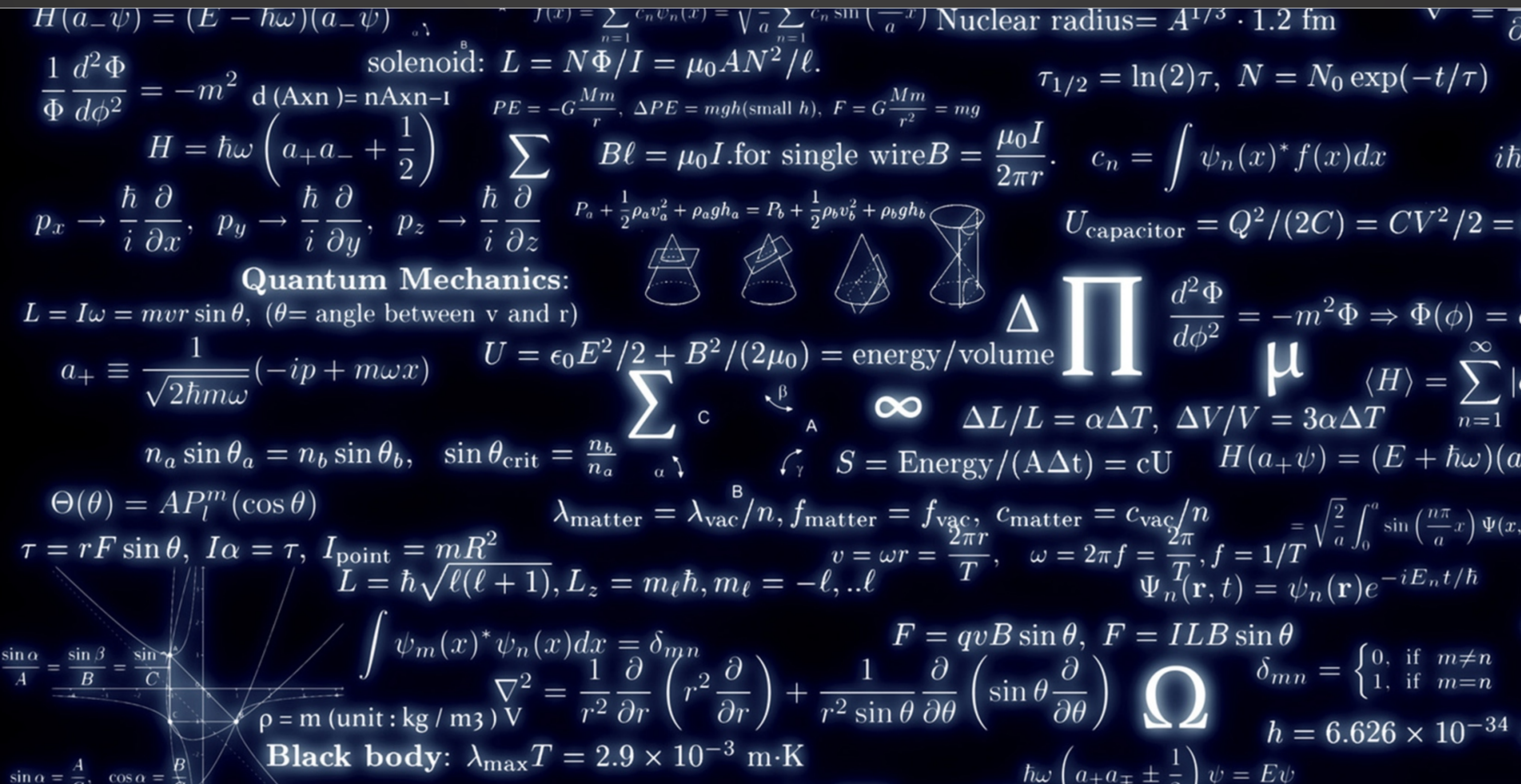
Artykuł V

K^C PRIME NUMBERS



O ilości liczb złożonych mniejszych od danej wielkości. Lematy, cd.

Artykuł V:

Model rozmieszczania się liczb pierwszych w krótkich przedziałach: dowód poprawności

Przypomnijmy zaproponowany w poprzednich artykułach model pokazujący kaskadowy mechanizm generowania się liczb pierwszych, którego formalny zapis ilustruje następujące twierdzenie:

Niech k oznacza liczbę liczb pierwszych między n i 2n+ 1 , a c liczbę liczb pierwszych między n^2 i $(n+1)^2$

Hipoteza 1:

Między n^2 i $(n+1)^2$ występuje c liczb pierwszych, c jest zbieżne do wartości ≈ k

Dla czytelników nieobcujących zawodowo z rozumowaniami matematycznymi sens tego twierdzenia jest czytelniejszy na konkretnych przykładach liczbowych:

10 – 21 (Mamy przedział zawierający 10 liczb, w tym 4 liczby pierwsze: 11,13,17 i 19, czyli k liczb pierwszych)
↓10^2=100, 11^2=121 → 100–121 (przedział zawiera 20 liczb, w tym 5 liczb pierwszych: 101,103,107,109 i 113, czyli c liczb pierwszych)
100 – 201 (k = 21 liczb pierwszych)
↓↓100^2=10 000, 101^2 = 10 201 → 10 000 – 10 201 (c = 23 liczby pierwsze)

1000 – 2001 (k = 135 liczb pierwszych)
↓↓↓ 1000^2=1000 000, 101^2 = 1 002 001 → 1 000 000 – 1 002 001 (c = 152 liczby pierwsze)

10 000 – 20 001 (k = 1037 liczb pierwszych)
↓↓↓↓10 000^2=100 000 000, 10 001^2=100 020 001 → 100 000 000 - 100 020 001 (c = 1089 liczb pierwszych)
100 000 – 200 001 (k = 8391 liczb pierwszych)
↓↓↓↓↓100000^2=10000000000,100001^2=10000200001→10000000000-10000200001 (c = 8631 liczb pierwszych)

Zaobserwowana w naszych badaniach nad liczbami pierwszymi zależność statystyczna, z uwagi na możliwość dostępu do odpowiednio obszernych list z liczbami pierwszymi, zachodzi daleko dalej niż mógł analogiczną własną zależność statystyczną badać Gauss.

Ponieważ obserwacja dotyczy nie tylko różnicy dwóch kolejnych kwadratów liczb naturalnych, ale również wszystkich przedziałów liczbowych o tej długości, w zakresie od 2n+1 do $(n+1)^2$, to w sposób oczywisty musi skłaniać nas to do rozszerzenia naszego twierdzenia do następującej postaci:
Niech k oznacza liczbę liczb pierwszych między n i $2n+1$, a c liczbę liczb pierwszych w każdym przedziale o długości 2n , począwszy od $2n+1$ do $(n+1)^2$ włącznie

Hipoteza 2: **W przedziałach liczb naturalnych o długości 2n występuje c liczb pierwszych i $0{,}75k \leq c \leq 2k$**

Wynika stąd, że jeżeli w przedziale liczb o długości 10, czyli między 10 a 21 (między n i 2n+1) są cztery liczby pierwsze (k liczb pierwszych), to we wszystkich przedziałach o długości dwukrotnie większej, czyli 21-42, 22-43, 23-44, etc. aż do 100 -121 włącznie, wystąpi zbieżna do 4 ilość liczb pierwszych (czyli we wszystkich przedziałach o długości 2n, aż do przedziału między n^2 a $(n+1)^2$ wystąpi c zbieżnych do k liczb pierwszych).

Uogólnienia zapisywane za pomocą formuł matematycznych stają się oczywiste dla konkretnych liczb, dlatego poniżej proponujemy zapoznanie się z ich początkową statystyką.

Środowiskowa anegdota wspomina wybitnego matematyka, który uważał, że analiza tablic z liczbami pierwszymi przy śniadaniu jest lepszą rozrywką niż lektura sprawozdań sportowych. Poniższa statystyka , siłą rzeczy jest uderzająca, gdyż pozwala na intuicyjne uchwycenie mechanizmu rządzącego rozmieszczaniem się liczb pierwszych:
1.Przedział jednoelementowy: między 1-3 (od n do 2n+1) jest jedna liczba pierwsza 2, a w przedziale $1^2=1$ (n^2) i $2^2=4$ $(n+1)^2$ są dwie liczby pierwsze: 2 i 3. Na niebiesko wyróżniono przedziały, w których c>k, na czerwono c=k, fiolet to c<k Poniżej dalsze statystyki.

2.Przedział dwuelementowy: 2-5, jedna liczba pierwsza: 3.

Między $2^2=4$ (n^2) i $3^2=9$ $(n+1)^2$ są dwie liczby pierwsze: 5 i 7

3. Przedział trzyelementowy: 3-7, jedna liczba pierwsza: 5.
$3^2=9$ i $4^2=16$; mamy 3 przedziały 6-elementowe: 7-14 (dwie liczby pierwsze: 11 i 13), 8-15 (dwie liczby pierwsze: 11 i 13) oraz 9-16 (dwie liczby pierwsze: 11 i 13)

4. Przedział 4-elementowy: 4-9, dwie liczby pierwsze: 5 i 7. Używamy symbolu LP dla słów: liczba pierwsza

$4^2=16$ i $5^2=25$; mamy 8 przedziałów 8-elementowych:

9-18(3LP:11,13,17)	**11-20(3LP:13,17,19)**	**13-22(2LP: 17,19)**	**15-24(3LP: 17,19,23)**
10-19(3LP:11,13,17)	**12-21(3LP:13,17,19)**	**14-23(2 LP:17,19)**	**16-25(3LP:17,19,23)**

5. Przedział 5-elementowy: 5-11, 1 LP: 7.

$5^2=25$ i $6^2=36$; mamy 15 przedziałów 10-elementowych:

11-22(3LP:13,17,19)	14-25(3LP:17,19,23)	17-28(2LP:19,23)	20-31(2LP:23,29)	23-34(2LP: 29,31)
12-23(3LP:13,17,19)	15-26(3LP:17,19,23)	18-29(2LP:19,23)	21-32(3LP:23,29,31)	24-35(2LP: 29,31)
13-24(3LP:17,19,23)	16-27(3LP:17,19,23)	19-30(2LP:23,29)	22-33(3LP:23,29,31)	25-36(2LP:29,31)

6. Przedział 6-elementowy: 6-13, 2 LP: 7 i 11.

$6^2=36$ i $7^2=49$; mamy 24 przedziały 12-elementowe:

13-26(3LP:17,19,23)	19-32(3LP:23,29,31)	25-38(3LP:29,31,37)	31-44(3LP:37,41,43)
14-27(3LP:17,19,23)	20-33(3LP:23,29,31)	26-39(3LP:29,31,37)	32-45(3LP:37,41,43)
15-28(3LP:17,19,23)	21-34(3LP:23,29,31)	27-40(3LP:29,31,37)	33-46(3LP:37,41,43)
16-29(3LP:17,19,23)	22-35(3LP:23,29,31)	28-41(3LP:29,31,37)	34-47(3LP:37,41,43)
17-30(3LP:19,23,29)	23-36(2LP:29,31)	29-42(3LP:31,37,41)	35-48(4LP:37,41,43,47)
18-31(3LP:19,23,29)	24-37(2LP:29,31)	30-43(3LP:31,37,41)	36-49(4LP:37,41,43,47)

7. Przedział 7-elementowy: 7-15, 2 LP: 11 i 13.

$7^2=49$ i $8^2=64$; mamy 35 przedziałów 14-elementowych:

15-30(4LP:17,19,23,29)	27-42(4LP:29,31,37,41)	39-54(4LP:41,43,47,53)
16-31(4LP:17,19,23,29)	28-43(4LP:29,31,37,41)	40-55(4LP:41,43,47,53)
17-32(4LP:19,23,29,31)	29-44(4LP:31,37,41,43)	41- 56(3LP:43,47,53)
18-33(4LP:19,23,29,31)	30-45(4LP:31,37,41,43)	42-57(3LP:43,47,53)
19-34(3LP:23,29,31)	31-46(3LP:37,41,43)	43-58(2LP:47,53)
20-35(3LP:23,29,31)	32-47(3LP:37,41,43)	44-59(2LP:47,53)
21-36(3LP:23,29,31)	33-48(4LP:37,41,43,47)	45-60(3LP:47,53,59)
22-37(3LP:23,29,31)	34-49(4LP:37,41,43,47)	46-61(3LP:47,53,59)
23-38(3LP:29,31,37)	35-50(4LP:37,41,43,47)	47- 62(3LP:53,59,61)
24-39(3LP:29,31,37)	36-51(4LP:37,41,43,47)	48-63(3LP:53,59,61)
25-40(3LP:29,31,37)	37-52(3LP:41,43,47)	49-64(3LP:53,59,61)
26-41(3LP:29,31,37)	38-53(3LP:41,43,47)	

8. Przedział 8-elementowy: 8-17, 2 LP: 11 i 13.

$8^2=64$ i $9^2=81$; mamy 48 przedziałów 16-elementowych:

17-34(4LP:19,23,29,31)	33-50(4LP:37,41,43,47)	49-66(3LP:53,59,61)
18-35(4LP:19,23,29,31)	34-51(4LP:37,41,43,47)	50-67(3LP:53,59,61)
19-36(3LP:23,29,31)	35-52(4LP:37,41,43,47)	51-68(4LP:53,59,61,67)
20-37(3LP:23,29,31)	36-53(4LP:37,41,43,47)	52-69(4LP:53,59,61,67)
21-38(4LP:23,29,31,37)	37-54(4LP:41,43,47,53)	53-70(3LP:59,61,67)
22-39(4LP:23,29,31,37)	38-55(4LP:41,43,47,53)	54-71(3LP:59,61,67)
23-40(3LP:29,31,37)	39-56(4LP:41,43,47,53)	55-72(4LP:59,61,67,71)
24-41(3LP:29,31,37)	40-57(4LP:41,43,47,53)	56-73(4LP:59,61,67,71)
25-42(4LP:29,31,37,41)	41-58(3LP:43,47,53)	57-74(5LP:59,61,67,71,73)
26-43(4LP:29,31,37,41)	42-59(3LP:43,47,53)	58-75(5LP:59,61,67,71,73)
27-44(5LP:29,31,37,41,43)	43-60(3LP:47,53,59)	59-76(4LP:61,67,71,73)
28-45(5LP:29,31,37,41,43)	44-61(3LP:47,53,59)	60-77(4LP:61,67,71,73)
29-46(4LP:31,37,41,43)	45-62(4LP:47,53,59,61)	61-78(3LP:67,71,73)
30-47(4LP:31,37,41,43)	46-63(4LP:47,53,59,61)	62-79(3LP:67,71,73)
31-48(4LP:37,41,43,47)	47-64(3LP:53,59,61)	63-80(4LP:67,71,73,79)
32-49(4LP:37,41,43,47)	48-65(3LP:53,59,61)	64-81(4LP:67,71,73,79)

9. Przedział 9-elementowy: 9-19, 3 LP: 11, 13 i 17.

9^2=81 i 10^2=100;mamy 63 przedziały 18-elementowe:

19-38(4LP:23,29,31,37)	35-54(5LP:37,41,43,47,53)	51-70(4LP:53,59,61,67)	67-86(4LP:71,73,79,83)
20-39(4LP:23,29,31,37)	36-55(5LP:37,41,43,47,53)	52-71(4LP:53,59,61,67)	68-87(4LP:71,73,79,83)
21-40(4LP:23,29,31,37)	37-56(4LP:41,43,47,53)	53-72(4LP:59,61,67,71)	69-88(4LP:71,73,79,83)
22-41(4LP:23,29,31,37)	38-57(4LP:41,43,47,53)	54-73(4LP:59,61,67,71)	70-89(4LP:71,73,79,83)
23-42(4LP:29,31,37,41)	39-58(4LP:41,43,47,53)	55-74(5LP:59,61,67,71,73)	71-90(4LP:73,79,83,89)
24-43(4LP:29,31,37,41)	40-59(4LP:41,43,47,53)	56-75(5LP:59,61,67,71,73)	72-91(4LP:73,79,83,89)
25-44(5LP:29,31,37,41,43)	41-60(4LP:43,47,53,59)	57-76(5LP:59,61,67,71,73)	73-92(3LP:79,83,89)
26-45(5LP:29,31,37,41,43)	42-61(4LP:43,47,53,59)	58-77(5LP:59,61,67,71,73)	74-93(3LP:79,83,89)
27-46(5LP:29,31,37,41,43)	43-62(4LP:47,53,59,61)	59-78(4LP:61,67,71,73)	75-94(3LP:79,83,89)
28-47(5LP:29,31,37,41,43)	44-63(4LP:47,53,59,61)	60-79(4LP:61,67,71,73)	76-95(3LP:79,83,89)
29-48(5LP:31,37,41,43,47)	45-64(4LP:47,53,59,61)	61-80(4LP:67,71,73,79)	77-96(3LP:79,83,89)
30-49(5LP:31,37,41,43,47)	46-65(4LP:47,53,59,61)	62-81(4LP:67,71,73,79)	78-97(3LP:79,83,89)
31-50(4LP:37,41,43,47)	47-66(3LP:53,59,61)	63-82(4LP:67,71,73,79)	79-98(3LP:83,89,97)
32-51(4LP:37,41,43,47)	48-67(3LP:53,59,61)	64-83(4LP:67,71,73,79)	80-99(3LP:83,89,97)
33-52(4LP:37,41,43,47)	49-68(4LP:53,59,61,67)	65-84(5LP:67,71,73,79,83)	81-100(3LP:83,89,97)
34-53(4LP:37,41,43,47)	50-69(4LP:53,59,61,67)	66-85(5LP:67,71,73,79,83)	

10. Przedział 10-elementowy: 10-21, 4 LP: 11, 13,17 i 19.

10^2=100 i 11^2=121; mamy 80 przedziałów 20-elementowych:

21-42(5LP:23,29,31,37,41)	48-69(4LP:53,59,61,67)	75-96(3LP:79,83,89)
22-43(5LP:23,29,31,37,41)	49-70(4LP:53,59,61,67)	76-97(3LP:79,83,89)
23-44(5LP:29,31,37,41,43)	50-71(4LP:53,59,61,67)	77-98(4LP:79,83,89,97)
24-45(5LP:29,31,37,41,43)	51-72(5LP:53,59,61,67,71)	78-99(4LP:79,83,89,97)
25-46(5LP:29,31,37,41,43)	52-73(5LP:53,59,61,67,71)	79-100(3LP:83,89,97)
26-47(5LP:29,31,37,41,43)	53-74(5LP:59,61,67,71,73)	80-101(3LP:83,89,97)
27-48(6LP:29,31,37,41,43,47)	54-75(5LP:59,61,67,71,73)	81-102(4LP:83,89,97,101)
28-49(6LP:29,31,37,41,43,47)	55-76(5LP:59,61,67,71,73)	82-103(4LP:83,89,97,101)
29-50(5LP:31,37,41,43,47)	56-77(5LP:59,61,67,71,73)	83-104(4LP:89,97,101,103)
30-51(5LP:31,37,41,43,47)	57-78(5LP:59,61,67,71,73)	84-105(4LP:89,97,101,103)
31-52(4LP:37,41,43,47)	58-79(5LP:59,61,67,71,73)	85-106(4LP:89,97,101,103)
32-53(4LP:37,41,43,47)	59-80(5LP:61,67,71,73,79)	86-107(4LP:89,97,101,103)
33-54(5LP:37,41,43,47,53)	60-81(5LP:61,67,71,73,79)	87-108(5LP:89,97,101,103,107)
34-55(5LP:37,41,43,47,53)	61-82(4LP:67,71,73,79)	88-109(5LP:89,97,101,103,107)
35-56(5LP:37,41,43,47,53)	62-83(4LP:67,71,73,79)	89-110(5LP:97,101,103,107,109)
36-57(5LP:37,41,43,47,53)	63-84(5LP:67,71,73,79,83)	90-111(5LP:97,101,103,107,109)
37-58(4LP:41,43,47,53)	64-85(5LP:67,71,73,79,83)	91-112(5LP:97,101,103,107,109)
38-59(4LP:41,43,47,53)	65-86(5LP:67,71,73,79,83)	92-113(5LP:97,101,103,107,109)
39-60(5LP:41,43,47,53,59)	66-87(5LP:67,71,73,79,83)	93-114(6LP:97,101,103,107,109,113)
40-61(5LP:41,43,47,53,59)	67-88(4LP:71,73,79,83)	94-115(6LP:97,101,103,107,109,113)
41-62(5LP:43,47,53,59,61)	68-89(4LP:71,73,79,83)	95-116(6LP:97,101,103,107,109,113)
42-63(5LP:43,47,53,59,61)	69-90(5LP:71,73,79,83,89)	96-117(6LP:97,101,103,107,109,113)
43-64(4LP:47,53,59,61)	70-91(5LP:71,73,79,83,89)	97-118(5LP:101,103,107,109,113)
44-65(4LP:47,53,59,61)	71-92(4LP:73,79,83,89)	98-119(5LP:101,103,107,109,113)
45-66(4LP:47,53,59,61)	72-93(4LP:73,79,83,89)	99-120(5LP:101,103,107,109,113)
46-67(4LP:47,53,59,61)	73-94(3LP:79,83,89)	100-121(5LP:101,103,107,109,113)
47-68(4LP:53,59,61,67)	74-95(3LP:79,83,89)	

Jak łatwo zauważyć pojawiają się pewne dewiacje, łatwo jednak dające się uporządkować w trzy rodzaje statystyk: na ogół c>k, znacznie rzadziej c=k, a jeszcze rzadziej c<k. To jedynie statystyka pierwszych dziesięciu kwadratów liczb obejmująca 278 przedziałów liczbowych; w naszych badaniach analiza dobiega 100 000 zbadanych przedziałów, w których statystyki dają porównywalne wyniki. Oczywiście korelacja statystyczna może być jedynie silną przesłanką do wysuwania hipotez – w nauce, a w matematyce w szczególności, najistotniejszym celem jest znalezienie jedno jednoznacznego związku przyczynowo–skutkowego. Aby go wskazać musimy skompletować niezbędne instrumentarium, które obejmuje trzy narzędzia z zakresu elementarnej, a nawet intuicyjnej matematyki. Narzędziami w matematyce są twierdzenia, które użyte w argumentacji dowodowej, nazywa się lematami. W tym miejscu, dla potrzeb naszego rozumowania przytoczymy twierdzenia z artykułu III:

Niech $n \in N$

Lemma 4: **Do wyznaczenia pierwszych dzielników każdej liczby złożonej < $(n+1)^2$ wystarcza znajomość liczb pierwszych $\leq n$**

Mamy więc nowe twierdzenie, które jako lemat orzeka, że do wyznaczenia wszystkich liczb złożonych między 10^2=100 (n^2) i 11^2 ($(n+1)^2$) wystarcza znajomość liczb pierwszych $\leq$10 ($\leq$n). Tym samym dostrzegamy, że każda liczba złożona <121 (czyli < $(n+1)^2$) musi być kolejną wielokrotnością: 2,3,5 lub 7 (wielokrotnością liczby pierwszej$\leq$n). Teraz możemy sięgnąć po kolejne narzędzie ze szkolnej matematyki, zadając pytanie: ile liczb jest między 10^2=100 (n^2) i 11^2 ($(n+1)^2$)? Odpowiedź brzmi: 2×10 (2n):

$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$

Niech $n \in N$

Lemma 5: **Ilość liczb w przedziale między n^2 i $(n+1)^2$ wynosi 2n.**

Każdy, kto zajmował się teorią liczb pierwszych, odruchem Pawłowa, widząc w rozważaniach na temat liczb pierwszych pojawienie się 2n skojarzy w pierwszym odruchu postulat Bertranda: między n i 2n musi być liczba pierwsza. Teraz wystarczy wspomnieć szkolne zadania z rachunku prawdopodobieństwa o losowaniu kul z pudełka zawierającego kule czarne i czerwone: prawdopodobieństwo wylosowania kuli określonego koloru zależy od liczebności kul tego koloru – spośród 10 kul (6 czarnych i 4 czerwone) prawdopodobieństwo wylosowania czerwonej wynosi 4:10 (0,4). Jeżeli więc:

1. między 10(n) i 2×10+1 (2n+1) znajduje się 10(n) liczb, pośród których są 4 liczby pierwsze:

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
n		↑		↑	↑	↑		↑		↑	2n+1
		2x6		2x 7	3x5	2x8		2x9		2x10	

to z uwagi na to, że

2. wszystkie liczby złożone między: 10(n) i 2×10+1 (2n+1) mają dzielniki pierwsze<10 (2,3,5,7), a więc $\leq$n

i

wszystkie liczby złożone między: 10^2(n^2) i 11^2 ($(n+1)^2$) również mogą mieć jedynie takie same

dzielniki pierwsze <10 (≤n) wnioskujemy, że z uwagi na identyczność kryterium wyboru, a tym samym jego procentowy udział, to:

3. między $10^2=100(n^2)$ i $2\times10+1=121$ ($(2n+1)^2$) też muszą być co najmniej 3 liczby pierwsze (c liczb pierwszych) Oczywiście nasuwa się pytanie dlaczego 3 liczby pierwsze, a nie dokładnie 8? Przecież przedział jest dwa razy dłuższy a kryterium wyboru jest identyczne (procentowy udział lczb złożonych: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$ a więc również dla $\frac{1}{n}$), a zamiast 8 liczb pierwszych mamy 5? Odpowiedzi udziela analiza algorytmu Eratostenesa. Na początek przyjrzyjmy się situ Eratostenesa dla 100 początkowych liczb naturalnych. Zrobimy to jednak nieco inaczej niż jest to przyjęte w dotychczasowych prezentacjach tego problemu.

Tak jak na diagramie poniżej zaznaczamy liczbę 2, a następnie podkreślamy co drugą liczbę. Każda z tych wyróżnionych liczb musi być liczbą złożoną, gdyż jako wielokrotność liczby pierwszej 2 musi się też przez nią dzielić – nie może więc być liczbą pierwszą. Jak łatwo zauważyć liczby podzielne przez liczbę pierwszą 2 stanowią 50 % liczb w każdej dziesiątce liczb. Będzie tak również w przedziale o dowolnej długości. Jeżeli rozważać będziemy np. liczby między 10-21, 100-121, albo pomiędzy 200-401 to też będzie ich 50% z dokładnością do jednej liczby (między13 i 15 jest 100% liczb podzielnych przez 2, a między 92 i 100 tylko 3 z 7 liczb są podzielne przez 2, a 4 liczby podzielne nie są, czyli liczb podzielnych przez 2 jest mniej niż 50%). Jakkolwiek więc mamy do czynienia z dewiacją wynoszącą 1 w częstości występowania liczb podzielnych przez 2, to jednak im dłuższy będzie rozpatrywany przedział liczbowy, tym mniejszy będzie udział tej dewiacji w procentowym zapisie liczebności tych liczb, np. między 92 i 1000 000 jest 999907 liczb, z czego 499954 to liczby nieparzyste, a jedna mniej czyli 499953 to liczby podzielne przez liczbę 2. Tak więc wraz ze wzrostem długości rozpatrywanego przedziału liczbowego udział liczb parzystych osiąga dokładnie 50%

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Następny krok w algorytmie Eratostenesa nakazuje wyróżnienie pierwszej niepodkreślonej liczby jaka występuje po liczbie 2 – jest nią kolejna liczba pierwsza, czyli liczba 3. Podkreślamy co trzecią liczbę – każda z nich oczywiście jest znowu liczbą złożoną, gdyż jako wielokrotność liczby pierwszej 3 musi się też przez nią dzielić, więc z definicji ma więcej niż dwa dzielniki i zalicza się do liczb złożonych. Zrobimy to jednak na oddzielnym diagramie. Dzięki temu łatwo zauważyć regularny wzór jaki te wielokrotności tworzą. Łatwo zauważyć, że liczb złożonych i podzielnych przez liczbę pierwszą 3 jest dokładnie 33,(3)%. I w tym miejscu zaczyna się wyłaniać wzór opisujący algorytm Euklidesa.

Od 100%liczb w danym przedziale trzeba odjąć 50% liczb podzielnych przez dwa, następnie odjąć 33,(3)% liczb podzielnych przez 3, ale dodać (!) 16,1(6)% liczb będących wspólną wielokrotnością liczb 2 i 3, gdyż w obydwu tabelach co szósta liczba z podkreśleń się powtarza: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96. Symbol % to zapis ułamka $\frac{1}{100}$, czyli 100% = 100 $\cdot\frac{1}{100}$ = 1. Jeżeli przez L_p oznaczymy liczbę liczb pierwszych, a cyfrą 1 (czyli 100%) - zapiszemy liczbę wszystkich liczb w rozpatrywanym przedziale, to pierwszy człon wzoru jest gotowy: $L_p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \ldots$

Dokładniejszą formułą będzie zapis następujący:

wielokrotności
liczby pierwszej 2 **wielokrotności liczby pierwszej 3**

↓ ↓

$$L_p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times3} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100} - \frac{1}{100} = \frac{300 - 150 - 100 + 50 + 6 - 3}{2\times3\times50} = \frac{103}{300} \approx 0{,}34$$

↑ ↑ ↑ ↑

Liczby będące zarówno wielokrotnościami 2 i 3 **liczba 2** **liczba 3** **liczba specjalna 1**

Wartość rzeczywista dla liczb z przedziału (0;100) = 0,34.

Druga oczywista obserwacja liczb złożonych podzielnych przez liczbę pierwszą 3 to dewiacja liczebności tych liczb w każdej kolejnej 10. Łatwo zauważyć, że w pierwszej i w drugiej dziesiątce są trzy liczby podzielne przez trzy, a w trzeciej dziesiątce takich liczb mamy 4. Ten cykl stale się powtarza: dwie dziesiątki liczb z trzema liczbami podzielnymi przez liczbę 3 i dziesiątka z czterema liczbami podzielnymi przez liczbę 3. Podobnie jednak, jak w przypadku liczb parzystych, gdy rozpatrywany przedział liczb rośnie, wartość ta wynosi dokładnie 33,(3) % = $\frac{1}{3}$ z dewiacją 1 oraz z koniecznością uwzględnienia wspomnianej już wspólnej wielokrotności liczb 2 i 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Następny krok w algorytmie Eratostenesa nakazuje wyróżnienie pierwszej niepodkreślonej liczby jaka występuje po liczbach 2 i 3 – jest nią kolejna liczba pierwsza, czyli liczba 5. Ponieważ tak, jak w przypadku liczby 2, również liczba 5 jest podwielokrotnością liczby 10 - podkreślenie liczb podzielnych przez 5 daje równie harmonijny rozkład: w każdej dziesiątce są dwie takie liczby. Jeżeli jednak rozpatrywać przedziały o różnej długości, znowu wystąpi dewiacja w liczebności tych liczb o 1. Ich liczebność w każdym dużym przedziale liczbowym to 20% czyli $\frac{1}{5}$ z dewiacją 1. Możemy wstawić kolejny człon do naszego równania, oczywiście uwzględniając ilość liczb powtarzających się, czyli dodając wspólne wielokrotności liczb 2 i 5 (10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 i 100) oraz wspólne wielokrotności liczb 3 i 5 (15,30,45,60,75 i 90) pomniejszone o wspólne wielokrotności liczb 2, 3 i 5 (30,60 i 90):

$$L_p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times3} + \frac{2}{100} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{3\times5} - \frac{1}{2\times3\times5} + \frac{1}{100} - \frac{1}{100} = \frac{92}{300} \approx 0,3$$

Wartość rzeczywista dla liczb z przedziału (0;100) = 0,28

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Następny krok w algorytmie Eratostenesa nakazuje wyróżnienie pierwszej niepodkreślonej liczby jaka występuje po liczbach 2, 3 i 5 – jest nią kolejna liczba pierwsza, czyli liczba 7. Znowu łatwa jest do wychwycenia powtarzalna dewiacja w obrębie każdej dziesiątki liczb: liczba podzielna przez liczbę pierwszą 7 może pojawić się tylko jeden raz lub dwa razy, ale wraz ze wzrostem długości rozpatrywanego przedziału będzie to dokładnie $\frac{1}{7}$ czyli 14,29% rozpatrywanych liczb z dewiacją jednej liczby i uwzględnieniem liczb powtarzających się jako wspólne wielokrotności liczb 2 i 7 (14,28,42,56,70,84,98), 3 i 7 (21,42,63,84) oraz 5 i 7 (35,70). Wzór zostanie rozbudowany o kolejny człon

$$L_p = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\times3} + \frac{2}{100} - \frac{1}{5} + \frac{1}{2\times5} + \frac{1}{3\times5} - \frac{1}{2\times3\times5} + \frac{1}{100} - \frac{1}{7} + \cdots \approx 0,26$$

Wartość rzeczywista dla liczb z przedziału (0;100) = 0,25

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29 30
31 32 33 34 35 36 37 38 39 40
41 42 43 44 45 46 47 48 49 50
51 52 53 54 55 56 57 58 59 60
61 62 63 64 65 66 67 68 69 70
71 72 73 74 75 76 77 78 79 80
81 82 83 84 85 86 87 88 89 90
91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

Oczywiście wzór przybiera mało praktyczną postać, natomiast pozwala na uogólnienie z zadaną dokładnością do wspomnianych dewiacji położenia: *w dowolnym przedziale liczbowym znajduje się procentowo zbliżona (zbieżna co do wartości liczbowej) ilość liczb złożonych wg przyjętej specyfikacji procentowej, a tym samym zbliżona liczba liczb pierwszych.* Dyskusję o wskazanych wyżej dewiacjach lokalnych w rozmieszczeniu liczb pierwszych przeprowadzamy w artykułach kolejnych.